Exercice II

Partie A : mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

A1/ Après largage par la fusée, le booster est soumis à la force d'attraction gravitationnelle exercée sur lui par la Terre. Les frottements étant négligeables du fait de la très faible densité de l'atmosphère à cette altitude, il n'est soumis qu'à cette force et sa chute est donc une « chute libre » tant qu'il n'atteint pas les couches denses de l'atmosphère.

Remarque : il est impropre de parler ici de poids puisque le booster n'est plus au « voisinage de la Terre » mais à une altitude de 53 km où l'intensité de la pesanteur ne vaut plus 9,8 m.s^{-2}. Cela dit, on peut appliquer la relation P = mg si l'on pense à recalculer la valeur de g à cette altitude (l'énoncé donne 9,6 m.s^{-2}).

A2/ Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m_{booster} \times \vec{a}$ or $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{Terre/booster} = m_{booster} \times \vec{g}$

donc $\vec{a} = \vec{g}$ Coordonnées du vecteur accélération : $\vec{a}\,(0\,;-g)$

A3/ Vecteur vitesse du centre de gravité du booster : on intègre les coordonnées du vecteur accélération (attention, l'angle de 63° est donné par rapport à la verticale donc $v_{0x} = v_0 \times \sin\alpha$ et $v_{0z} = v_0 \times \cos\alpha$).

$v_x(t) = v_0 \times \sin\alpha$
$v_z(t) = -g \times t + v_0 \times \cos\alpha$

A4/ Equations horaires du centre de gravité du booster : on intègre à nouveau.

$$x(t) = v_0 \sin\alpha \times t$$
$$z(t) = \frac{-1}{2} g \times t^2 + v_0 \cos\alpha \times t + h$$

A5/ Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse du booster est nulle : $v_z(t_{max}) = 0$

On a donc : $v_z(t_{max}) = -g \times t_{max} + v_0 \times \cos\alpha = 0$ donc $t_{max} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}$

Altitude correspondante : $$z_{max}(t_{max}) = \frac{-1}{2} g \times t_{max}^2 + v_0 \cos\alpha \times t_{max} + h$$

$$z(t_{max}) = \frac{-1}{2} g \times \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \cos\alpha \times \frac{v_0 \cos\alpha}{g} + h$$

$$z(t_{max}) = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + h = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g} + h$$

Application numérique : $$z(t_{max}) = \frac{1820^2 \times \cos^2(63)}{2 \times 9{,}6} + 53400 = 89000 \text{ m} \quad \text{soit} \quad 89 \text{ km}$$

Partie B : lois de Kepler et satellisation

B1/ Dans le repère de Frenet : $\vec{F}_{T/P} = \frac{G m_T m_P}{(R_T + z)^2} \vec{N}$ (la force est attractive donc suivant $\vec{N}$)

B2/ Le système étudié est le vaisseau Progress de masse m_P soumis uniquement à l'attraction terrestre :

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m_P \times \vec{a}$ or $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/P} = \frac{G m_T m_P}{(R_T + z)^2} \vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{R_T + z} \vec{N}$

d'où $\frac{G m_T m_P}{(R_T + z)^2} = m_P \times \frac{v^2}{R_T + z}$ et donc $\frac{G m_T}{R_T + z} = v^2$

L'expression de la vitesse orbitale est : $v = \sqrt{\frac{G m_T}{R_T + z}}$

Application numérique : $v = \sqrt{\dfrac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}{6380.10^{3} + 334.10^{3}}} = 7710\ \text{m.s}^{-1}$ soit 7,71 km/s

C1/ Quantité de mouvement d'un système ponctuel de masse m et de vitesse vectorielle $\vec{v}$: $\vec{p} = m \times \vec{v}$

C2/ Lorsqu'un système est isolé, c'est-à-dire que la somme des forces extérieures agissant sur lui est nulle, la quantité de matière du système est constante en direction, sens et norme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{or} \quad \sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \overrightarrow{cte}$$

C3/ Il y a deux manières de traiter cette question :

- soit l'on se place dans un référentiel lié au centre d'inertie du système {ISS + Progress + carburant} : la quantité de mouvement du système est alors nulle.
- soit on se place dans le référentiel géocentrique et on travaille non pas sur la quantité de mouvement mais sur les variations de la quantité de mouvement.

Le système {ISS + Progress + carburant} est en orbite circulaire uniforme autour de la Terre donc son vecteur vitesse et par conséquent son vecteur quantité de mouvement sont tangentiels à sa trajectoire. Le système n'est soumis qu'à une seule force, l'attraction gravitationnelle, or celle-ci est radiale et centripète, donc n'a pas de composante tangentielle. En appliquant le principe d'inertie suivant un axe tangentiel à la trajectoire, le système est donc isolé et sa quantité de mouvement totale constante. On a donc :

$$\vec{p}_{(ISS+Progress+carburant)} = \vec{p}_{(ISS+Progress)} + \vec{p}_{gaz\ éjectés}$$

On considère enfin que la masse de gaz éjectés est égale à la masse de carburant (+ comburant pour être précis) embarquée d'après la loi de conservation de la matière lors d'une réaction chimique.

✓ Première méthode : on considère un référentiel lié au centre de gravité du système {ISS + Progress + carburant}. Dans ce référentiel, le système est immobile. On a alors :

$$\vec{p}_{(ISS+Progress+carburant)} = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \vec{p}_{(ISS+Progress)} + \vec{p}_{gaz\ éjectés} = \vec{0}$$

d'où $(m_{ISS} + m_P) \times \vec{v}_{ISS+Progress} = -\, m_{gaz\ éjectés} \times \vec{v}_{gaz\ éjectés}$ et $\vec{v}_{ISS+Progress} = \dfrac{-\, m_{gaz\ éjectés}}{m_{ISS} + m_P} \times \vec{v}_{gaz\ éjectés}$

Application numérique : $v_{ISS+Progress} = \dfrac{m_{gaz\ éjectés}}{m_{ISS} + m_P} \times v_{gaz\ éjectés} = \dfrac{3{,}8.10^{3}}{426.10^{3}} \times 3300 = 29\ \text{m.s}^{-1}$

✓ Deuxième méthode : on travaille dans le référentiel géocentrique sur les variations de la quantité de mouvement : la vitesse initiale du système n'est alors pas connue.

$$\vec{p}_{ISS+Progress+carburant} = \vec{p}_{ISS+Progress} + \vec{p}_{gaz\ éjectés} = \overrightarrow{cte} \ \text{donc}\ \Delta\vec{p}_{ISS+Progress+carburant} = \Delta\vec{p}_{ISS+Progress} + \Delta\vec{p}_{gaz\ éjectés} = \vec{0}$$

d'où $\Delta\vec{p}_{ISS+Progress} = -\Delta\vec{p}_{gaz\ éjectés}$ et $(m_{ISS} + m_P) \times \Delta\vec{v}_{ISS+Progress} = -\, m_{gaz\ éjectés} \times \Delta\vec{v}_{gaz\ éjectés}$

On arrive à : $\Delta\vec{v}_{ISS+Progress} = \dfrac{-\, m_{gaz\ éjectés}}{m_{ISS} + m_P} \times \Delta\vec{v}_{gaz\ éjectés}$

Application numérique : $\Delta v_{ISS+Progress} = \dfrac{m_{gaz\ éjectés}}{m_{ISS} + m_P} \times \Delta v_{gaz\ éjectés} = \dfrac{3{,}8.10^{3}}{426.10^{3}} \times 3300 = 29\ \text{m.s}^{-1}$

C4/ L'énoncé dit que le vaisseau Progress doit accélérer la station de 25 m.s^{-1} or il dispose de suffisamment de carburant pour l'accélérer de 29 m.s^{-1} donc l'opération de remorquage peut être réalisée sans consommer tout le carburant. *Il doit rester un peu de carburant au vaisseau pour ensuite, une fois décroché de la station, ralentir et maitriser sa propre rentrée dans l'atmosphère.*