Équation différentielle linéaire d'ordre 1 : définition

En physique-chimie, la dérivée par rapport au temps de la grandeur G a un sens particulier. Dans certains cas (chapitres 4, 5, 15 et 19), cette grandeur dérivée est une fonction affine de G, et on dit alors que G vérifie une **équation différentielle** linéaire d'ordre 1.

Définition

Soit G une grandeur physique ou chimique, fonction du temps t, définie sur un intervalle $[0 ; t_f]$ ou $[0 ; +\infty[$.

Définition

Une **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** dont l'inconnue est une fonction du temps dérivable G s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} = aG + b$$

où a est un réel non nul exprimé en s^{-1} et b un réel quelconque dont l'unité est celle du G par seconde.

Remarque

Les notations diffèrent en mathématiques et en physique-chimie mais sont cohérentes.

	Mathématiques	Physique-chimie
Variable	x	t
Fonction	y	G
Dérivée	y'	$\frac{dG}{dt}$
Équation différentielle	$y' = ay + b$	$\frac{dG}{dt} = aG + b$

Mise en équation

C'est l'application des lois physiques et chimiques qui conduit dans certains cas à une équation de ce type : lorsque la dérivée par rapport au temps d'une grandeur G est égale à une fonction affine de G, on peut écrire $\frac{dG}{dt} = aG + b$.

Propriété

Comportement asymptotique

En « régime permanent », si on suppose que G tend vers une fonction constante G_∞ quand $t \to +\infty$, sa dérivée tend vers 0, et l'équation différentielle s'écrit $0 = aG_\infty + b$.

- Souvent en physique-chimie, a est un coefficient négatif. La grandeur $\tau = -\frac{1}{a}$, homogène à une durée, est le « temps caractéristique » et $b = -aG_\infty = \frac{1}{\tau}G_\infty$. L'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{dG}{dt} + \frac{1}{\tau}G = \frac{1}{\tau}G_\infty$$

Exemple

Lorsqu'un corps solide de température T est plongé dans un fluide à la température T_∞, sa température T évolue au cours du temps et vérifie l'équation différentielle $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T = \frac{1}{\tau}T_\infty$.

Remarque

En physique-chimie, l'équation est souvent écrite sous la forme $\frac{dG}{dt} - aG = b$.

Si $b = 0$, on dit qu'elle est « homogène » ou « sans second membre ».

Lien avec les sciences expérimentales

Après quelques secondes de chute, la parachutiste Deborah Ferrand (française championne du monde de parachutisme civile et militaire 2018) atteint son régime permanent de chute libre, sa vitesse verticale est devenue constante, $v_{z,\infty} \approx 200$ km·h^{-1}.

Condition initiale

Comme pour la recherche d'une primitive, la résolution complète d'une équation différentielle d'ordre 1 nécessite la donnée de la **condition initiale**.

Notation

La **condition initiale** est la donnée de la valeur G_0 de G à l'instant $t = 0$ s :

$$G(0) = G_0$$

Son altitude initiale vaut $z_0 \approx 1\,000$ m et sa vitesse verticale initiale $v_{z,0} = 0$ km·h^{-1}.

Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

En physique-chimie, la **solution d'une équation différentielle** linéaire d'ordre 1 vérifiée par une fonction du temps possède des propriétés et une courbe représentative remarquables.

Solution générale

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, G une fonction de t vérifiant l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = aG + b$ et $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} - aG = 0$ l'équation homogène.

Propriété

- La **solution générale** de l'équation homogène est $G_h(t) = Ke^{at}$. Une **solution particulière** de l'équation complète est la fonction constante $G_p(t) = -\frac{b}{a}$.
- La **solution générale** de l'équation est la somme $G(t) = G_h(t) + G_p(t) = Ke^{at} - \frac{b}{a}$.
- La donnée de la condition initiale $G(0) = G_0$ permet de calculer la valeur de la constante d'intégration K.

Exemple

L'équation $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}G + \frac{1}{\tau}G_\infty$ a pour solution générale $G(t) = Ke^{-t/\tau} + G_\infty$. La condition initiale $G(0) = G_0$ donne $G_0 = Ke^0 + G_\infty$ donc $K = G_0 - G_\infty$ et $G(t) = (G_0 - G_\infty)e^{-t/\tau} + G_\infty$.

Remarque

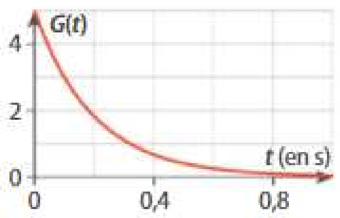
Soit h une fonction du temps.

Il ne faut pas confondre les équations $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = aG$ et $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = h$. Pour résoudre cette dernière, on cherche une primitive H de h (voir **Primitive d'une fonction du temps p. 20**), la solution générale de l'équation est : $G = H + K$, où K est une constante d'intégration qu'on détermine grâce à la condition initiale.

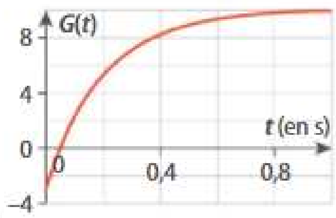
Courbe représentative de la solution

Voici, la courbe représentative de $G(t) = (G_0 - G_\infty)e^{-t/\tau} + G_\infty$ (exemple ci-dessus) dans deux cas distincts.

Premier cas : $G_0 > G_\infty$
($G_0 = 5$, $G_\infty = 0$, $\tau = 0{,}2$)



Deuxième cas : $G_0 < G_\infty$
($G_0 = -3$, $G_\infty = 10$, $\tau = 0{,}2$)



Valeurs remarquables

Propriétés

Pour $a < 0$ et $b = 0$, $G(t) = G_0e^{-t/\tau}$ avec $\tau = -\frac{1}{a}$.

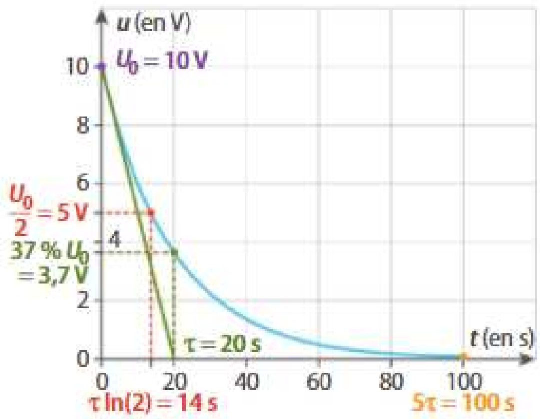
- La condition initiale s'écrit $G(0) = G_0$.
- À la date $t = -\frac{\ln(2)}{a} = \tau\ln 2$, $G\left(\frac{\ln(2)}{-a}\right) = G_0e^{-\ln(2)} = \frac{G_0}{2}$.
- À la date $t = \tau$, $G(\tau) = G_0e^{-1} \approx 0{,}37G_0$; τ est donc la date à laquelle G vaut 37 % de sa valeur initiale.
- La tangente à la courbe au point de date $t = 0$ s coupe l'axe des temps à l'abscisse $t = \tau$.
- Si $t > 5\tau$, alors $G(t) < G(5\tau)$, soit $G(t) < G_0e^{-5}$ donc $G(t) < \frac{G_0}{100}$.
- Comportement asymptotique : $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) = 0$.

Lien avec les sciences expérimentales

Les **valeurs remarquables** permettent de déterminer graphiquement les valeurs des paramètres G_0 et τ à partir d'une courbe expérimentale.

Exemple

La courbe suivante donne l'évolution de la tension électrique u, exprimée en volts, aux bornes d'un condensateur en fonction du temps t exprimé en secondes.



- L'ordonnée du point d'abscisse $t = 0$ s est la valeur de la condition initiale (en violet) $U_0 = 10$ V.
- La date à laquelle $u(t)$ est égale à 37 % de U_0 (en vert), soit 3,7 V, est $\tau = 20$ s.
- La tangente à la courbe au point de date $t = 0$ s (en vert) coupe l'axe des temps en $t = \tau = 20$ s.
- La date à laquelle $u(t) = \frac{U_0}{2} = 5$ V (en rouge) est $\tau\ln(2) = 14$ s.
- Pour $t > 5\tau$, c'est-à-dire $t > 100$ s (en orange), on vérifie que $u(t) < \frac{10}{100} = 0{,}1$ V.